

Devoir libre de Mathématiques n°6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. (a) Étudier le signe de la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur \mathbb{R}_+ .
(b) Étudier le signe de la fonction $\psi : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur \mathbb{R}_+ .
(c) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
(d) Étudier la limite de f en 0 à droite.
3. Étudier la limite de f en 0 à gauche.
4. Montrer que la fonction f peut se prolonger par continuité en 0 en une fonction \tilde{f} que l'on précisera.
5. Déterminer un équivalent simple de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0.